

Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение высшего  
профессионального образования

«Санкт-Петербургский государственный университет»

Кафедра океанологии

Учебное пособие

## **Методы оценки бароклинного радиуса деформации Россби**

Авторы: Белоненко Т.В., Новоселова Е.В.

Санкт-Петербург

2019

## Оглавление

<b>ВВЕДЕНИЕ .....</b>	<b>3</b>
<b>1. ИСТОРИЯ ПОЯВЛЕНИЯ ПОНЯТИЯ .....</b>	<b>4</b>
<b>2. ХАРАКТЕРНЫЕ ЗНАЧЕНИЯ БАРОТРОПНОГО И БАРОКЛИННОГО РАДИУСА ДЕФОРМАЦИИ РОССБИ .....</b>	<b>6</b>
<b>3. РАСЧЁТ БАРОКЛИННОГО РАДИУСА ДЕФОРМАЦИИ РОССБИ .....</b>	<b>8</b>
<b>3.1. ЧАСТОТА ВЯЙСЯЛЯ-БРЕНТА .....</b>	<b>8</b>
<b>3.2. ПЕРВЫЙ МЕТОД (WKV-ПРИБЛИЖЕНИЕ) .....</b>	<b>9</b>
<b>3.3. ВТОРОЙ МЕТОД (ДВУХСЛОЙНАЯ МОДЕЛЬ ОКЕАНА).....</b>	<b>11</b>
<b>4. ПРОБЛЕМЫ, ВОЗНИКАЮЩИЕ ПРИ ЧИСЛЕННОЙ ОЦЕНКЕ БАРОКЛИННОГО РАДИУСА ДЕФОРМАЦИИ РОССБИ.....</b>	<b>12</b>
<b>4.1. УЧЁТ ЧИСЛА <math>\pi</math> .....</b>	<b>12</b>
<b>4.2. РАСЧЁТ ЧАСТОТЫ ВЯЙСЯЛЯ-БРЕНТА .....</b>	<b>14</b>
<b>4.3. ОПРЕДЕЛЕНИЕ ГРАНИЦЫ МЕЖДУ СЛОЯМИ В ДВУХСЛОЙНОЙ МОДЕЛИ ОКЕАНА .....</b>	<b>15</b>
<b>4.4. ОБЛАСТИ НЕУСТОЙЧИВОЙ СТРАТИФИКАЦИИ .....</b>	<b>16</b>
<b>5. ЧИСЛЕННЫЕ ОЦЕНКИ БАРОКЛИННОГО РАДИУСА ДЕФОРМАЦИИ В РАЗНЫХ ЧАСТЯХ МИРОВОГО ОКЕАНА .....</b>	<b>16</b>

## ВВЕДЕНИЕ

Радиус деформации Россби – это фундаментальный масштаб длины, характеризующий поведение вращающейся жидкости, подверженной действию уравновешивающих гравитационных сил. По существу, он является горизонтальным масштабом, на котором эффекты вращения становятся такими же важными, как и эффекты плавучести (Гилл, 1986).

Рассмотрим его значение для нестационарных задач. На ранних стадиях приспособления при наличии начального разрыва изменение уровня сосредоточено на небольшом расстоянии. При этом градиент давления оказывается очень большим, и поведение определяется силой тяжести. Другими словами, на масштабах, малых по отношению к радиусу Россби, приспособление происходит приблизительно так же, как в невращающейся системе. Однако позднее, когда изменение уровня распространяется на расстояние, сравнимое с радиусом Россби, ускорение Кориолиса становится уже таким же важным, как и градиент давления. При этом вращение вызывает реакцию, которая заметно отличается от реакции, возникающей в случае без вращения (Гилл, 1986).

Радиус деформации Россби оказывается существенным не только для задач о неустановившихся режимах, но является важным масштабом и для решения, характеризующего геострофическое равновесие. Это видно при анализе задачи о приспособлении при начальном разрыве, так как разрыв не распространяется неограниченно, а только на расстояние порядка радиуса Россби (Гилл, 1986).

Для геострофического потока радиус Россби является масштабом, на котором два члена, входящие в уравнение сохранения потенциальной завихренности в однородной вращающейся жидкости ( $I$ ), имеют одинаковый порядок величины (Гилл, 1986).

$$Q' = \frac{\zeta}{H} - \frac{f\eta}{H^2}, \quad (1)$$

где  $Q'$  – возмущение потенциальной завихренности;  $\eta$  – возвышение свободной поверхности;  $f$  – параметр Кориолиса;  $\zeta = \frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y}$  – относительная завихренность жидкости, т. е. вертикальная составляющая вихря относительно вращающейся системы (горизонтальные составляющие тождественно равны нулю).

Обобщая, радиус деформации – это характеристика, позволяющая оценить эффект вращения. Он показывает, что для масштабов, малых по сравнению с величиной радиуса

деформации, эффекты вращения слабы, тогда как для масштабов, сравнимых с ним или больших, эффекты вращения играют важную роль.

## 1. ИСТОРИЯ ПОЯВЛЕНИЯ ПОНЯТИЯ

В 1937 г. Россби, анализируя геофизические процессы в атмосфере и океане, обнаружил, что эти крупномасштабные системы имеют определенную тенденцию распадаться на антициклонические вихри, и ввёл масштаб  $\lambda = \frac{1}{f} \sqrt{gH}$ , необходимый для перевода размерных единиц к безразмерным (Rossby, 1937). В следующей статье 1938 г. он указывает, что этот  $\lambda$  является фундаментальным параметром во всех квазистатических деформациях жидкости, в связи с чем целесообразно ввести для него специальное название: «радиус деформации». Это название, как он пишет, связано с радиусом «инерционной окружности», определяемой вращением Земли, и соответствует скорости длинной волны в канале глубиной  $H$  (Rossby, 1938). В новой статье 1939 г. Россби даёт физическое обоснование масштабу  $\lambda$ . Он опирается на исследование Vjerknes (1937), который, анализируя перенос воздушных масс в верхних слоях тропосферы через участок, перпендикулярный двум последовательным изобарам, обнаружил, что этот перенос существенно зависит от кривизны изобар и широты разреза. Россби развивает этот подход и вводит дополнительное понятие «радиус кривизны изобар» (radius of curvature of the isobars) и в дальнейшем получает формулу для фазовой скорости волн  $c$  на зональном баротропном потоке  $U$  (Rossby, 1937, 1938, 1939):

$$c = \frac{U - \frac{\beta L^2}{4\pi^2}}{1 + \frac{L^2}{4\pi^2 \lambda^2}}, \quad (2)$$

где

$$\lambda = \frac{1}{f} \sqrt{gH}. \quad (3)$$

Здесь  $L$  – длина гармонической волны,  $g$  – ускорение свободного падения,  $H$  – глубина,  $f = 2\Omega \sin\varphi$  – параметр Кориолиса,  $\Omega = \frac{2\pi}{T} = 7,2921 * 10^{-5} \text{ с}^{-1}$  – угловая скорость вращения Земли вокруг оси,  $\varphi$  – широта места,  $\beta$  – величина, характеризующая скорость изменения параметра Кориолиса с широтой и вычисляемая по формуле:

$$\beta = \frac{\partial f}{\partial y} = \frac{\partial f}{R \partial \varphi} = \frac{2\Omega \cos \varphi}{R_E}, \quad (4)$$

где  $R_E$  – радиус Земли.

Таким образом, получается, что радиус кривизны изобар в работе Bjerknæs (1937) – это то же самое, что и радиус деформации Россби, ранее введенный как горизонтальный масштаб для обезразмеривания переменных. В дальнейшем этот масштаб будут называть «баротропным радиусом деформации Россби» (Гилл, 1986).

Гилл указывает, что «Задача Россби о приспособлении», которая осветила много новых сторон поведения вращающихся жидкостей, таких, как роль «потенциальной завихренности» и стремление жидкости достичь «геострофического равновесия», показала важную роль радиуса деформации Россби, как основного пространственного масштаба в задачах о приспособлении вращающейся жидкости под действием силы тяжести. В бароклиных движениях эту роль играет бароклиный радиус деформации Россби. Поскольку анализ применим ко всем нормальным модам стратифицированной жидкости, то имеется бесконечное множество радиусов Россби, каждый из которых связан с отдельной модой (Гилл, 1986).

Ле Блон и Майсек (1981) баротропный радиус деформации Россби называют иначе, а именно внешним радиусом деформации Россби. Наряду с внешним, они также рассматривают внутренний радиус деформации. Тогда для баротропной и бароклиных  $n$  мод дисперсионное уравнение имеет вид:

$$\omega_0 = - \frac{\beta k_1}{k_1^2 + k_2^2 + \frac{1}{r_e^2}}, \quad (5)$$

$$\omega_n = - \frac{\beta k_1}{k_1^2 + k_2^2 + \left(\frac{n\pi}{r_i}\right)^2}, \quad (6)$$

где  $\omega_0$  и  $\omega_n$  – частоты волн,  $k_1$  и  $k_2$  – зональное и меридиональное волновые числа,  $r_e$  и  $r_i$  – внешний и внутренний радиусы деформации Россби, определяемые следующим образом:

$$r_e = \frac{1}{f} \sqrt{gH}, \quad (7)$$

$$r_i = \frac{NH}{f}, \quad (8)$$

где  $N$  – частота Вайсяля-Брента (о ней будет рассказано более подробно в разделе 3.1).

## 2. ХАРАКТЕРНЫЕ ЗНАЧЕНИЯ БАРОТРОПНОГО И БАРОКЛИННОГО РАДИУСА ДЕФОРМАЦИИ РОССИИ

Баротропный и бароклинный радиусы деформации России определяются в теории системы уравнений «мелкой воды» применительно к длинным гравитационным волнам. Суть этого подхода заключается в следующем. Океан (как и атмосфера) является тонким слоем жидкости в том смысле, что его горизонтальная протяженность гораздо больше, чем глубина. Поэтому неудивительно, что большая часть энергии, связанная с движением, содержится в компонентах, горизонтальный масштаб которых гораздо больше, чем вертикальный. Это позволяет искать решение системы гидродинамических уравнений при помощи метода разделения переменных, когда решение можно выразить в виде суммы нормальных мод, каждая из которых имеет фиксированную вертикальную структуру и ведет себя в горизонтальном измерении и во времени таким же образом, как однородная жидкость со свободной поверхностью (Белоненко, Кубряков, 2014).

Этот подход, существенно упрощающий задачу поиска решений, используется еще со времен Лапласа. В системе, состоящей из  $n$  слоев различной плотности, существует  $n$  таких мод, соответствующих  $n$  степеням свободы. Непрерывно стратифицированной жидкости соответствует бесконечное число слоев, и поэтому существует бесконечное множество мод, которые ведут себя сходным образом, при этом все они независимы (Гилл, 1986; Белоненко, Кубряков, 2014).

Для оценки горизонтальных масштабов рассматриваемых явлений вводится фундаментальный масштаб длины, называемый радиусом деформации России, который характеризует стремление системы к геострофическому равновесию и указывает характерный масштаб, при котором эффекты вращения Земли (силы Кориолиса) уравниваются градиентами атмосферного давления (или эффектами плавучести). Когда изменение уровня распространяется на расстояние, сравнимое с радиусом деформации России, то влияние сил Кориолиса столь же важно, как и градиенты давления (Белоненко, Кубряков, 2014).

Общий вид формулы для расчёта радиуса деформации  $R$  имеет следующий вид:

$$R = \frac{c}{|f|}. \quad (9)$$

Таким образом, характерные значения радиуса России  $R$  меняются с широтой из-за изменения параметра Кориолиса  $f$ , которое принимает значения:

$$f = 2\Omega \sin\varphi = 1,47 * 10^{-4} \sin\varphi \text{ [с}^{-1}\text{]}. \quad (10)$$

В своей работе Гилл (1986) рассчитал характерные значения радиуса для средних широт ( $\sim 45^\circ$ ), рассмотрим эти результаты. Для глубокого океана, где  $H$  составляет 4 или 5 км,  $c$  примерно равно 200 м/с, радиус Россби, согласно формуле (10), равен 2000 км. По сравнению с глубиной океана это очень много. Следовательно, на этом масштабе гидростатическое приближение выполняется, но, вообще говоря, этот масштаб слишком велик, чтобы на нем считать  $f$  постоянным. Для континентальных шельфов и мелких морей, подобных Северному морю, применимы намного меньшие значения, так как глубина здесь намного меньше. Например, при  $H = 40$  м,  $c = 20$  м/с  $R = 200$  км. Так как Северное море имеет гораздо большие размеры, то вращение оказывает в нем сильное влияние на переходные движения, такие как приливы и нагоны.

Итак, для каждой моды имеется свой радиус Россби. Вычисленные выше значения были получены для баротропных мод, и поэтому они называются баротропными радиусами Россби. Каждая бароклинная мода имеет связанный с ней радиус Россби

$$R_n = \frac{c_n}{|f|}, \quad (11)$$

который можно назвать  $n$ -м бароклиненным радиусом Россби. Здесь  $c_n$  – фазовая скорость волны  $n$ -й моды в невращающейся системе. Если значение  $n$  не указывается, то подразумевается первая бароклинная мода. Для океана значение  $c_1$  обычно равно 1 – 3 м/с, и типичные значения бароклинного радиуса Россби равны 10 – 30 км. Это значение велико по сравнению с вертикальным масштабом (в качестве которого можно взять глубину термоклина около 1 км), так что гидростатическое приближение на этом масштабе выполняется. Бароклинный радиус Россби является для океана естественным масштабом, связанным с такими пограничными явлениями, как пограничные течения и фронты, а также с вихрями (Гилл, 1986).

Необходимо отметить, что радиус деформации в тропическом и экваториальном районах значительно больше указанных ранее величин, вычисленных для средних широт. Например, на рассмотренной широте  $45^\circ f \approx 10^{-4} \text{ [с}^{-1}\text{]}$ , тогда как на широте  $10^\circ f \approx 0,25 * 10^{-4} \text{ [с}^{-1}\text{]}$ . Из этого видно, что при равных фазовых скоростях  $c$  радиус деформации Россби будет отличаться в 4 раза.

Кроме того, формулы (9) и (11) применимы лишь при  $\varphi > 5^\circ$ , подробнее об этом говорится в разделе 3.2.

### 3. РАСЧЁТ БАРОКЛИННОГО РАДИУСА ДЕФОРМАЦИИ РОССБИ

#### 3.1. ЧАСТОТА ВЯЙСЯЛЯ-БРЕНТА

Тут стоит несколько подробнее рассказать о частоте Вяйсяля-Брента (или частоте плавучести, как её ещё называют), поскольку эта характеристика активно используется при расчёте бароклинного радиуса деформации Россби.

Океан в общем имеет устойчивую плотностную стратификацию, то есть относительно более плотные слои воды расположены ниже менее плотных. Однако сравнительно часто под действием тех или иных причин происходят нарушения такой картины, и менее плотные массы воды оказываются внизу. Длительное время такая стратификация сохраняться не может, и в соответствии с законом Архимеда происходит вытеснение менее плотных масс жидкости вверх. Выведенный из состояния равновесия объем жидкости при возвращении в исходное состояние может его проскочить за счет инерции, и тогда возникают инерционные колебания (Доронин, 1978). Именно для определения их частоты используется параметр, именуемый частотой Вяйсяля-Брента или частотой плавучести. Она вычисляется по следующей формуле:

$$N = \sqrt{-\frac{g}{\rho} \frac{\partial \rho}{\partial z} - \frac{g^2}{c_s^2}} \quad (12)$$

где  $g$  – ускорение свободного падения,  $\rho$  – плотность воды,  $z$  – толщина слоя воды,  $c_s$  – скорость звука.

Для настоящих целей вторым членом можно пренебречь так как скорость звука по сути бесконечна (Chelton et al., 1998), тогда частота Вяйсяля-Брента может быть определена по формуле (13).

$$N = \sqrt{-\frac{g}{\rho} \frac{\partial \rho}{\partial z}} \quad (13)$$

Если  $N^2 > 0$ , то жидкость устойчиво стратифицирована, если  $N^2 < 0$ , то стратификация является неустойчивой.

Таким образом, если говорить кратко, то частота Вяйсяля-Брента – это частота, с которой колеблется (осциллирует) выведенная из равновесия частица под воздействием выталкивающей силы Архимеда, силы тяжести и силы инерции.



### 3.2. ПЕРВЫЙ МЕТОД (WKВ-ПРИБЛИЖЕНИЕ)

Если не вдаваться в подробности, то метод WKВ-приближения (или квазиклассическое приближение) – это метод приближенного решения линейных дифференциальных уравнений второго порядка. WKВ – это инициалы учёных-физиков Вентцеля Г., Крамерса Х.А. и Бриллюэна Л., которые предложили этот метод в 1926 году.

Применив к уравнениям движения WKВ-приближение, Chelton et al. (1998) разработали надежный метод для определения первого бароклининого радиуса Россби. На  $f$ -плоскости авторы численно решают задачу на собственные значения Штурма-Лиувилля для вертикальной структуры вида (14):

$$\frac{d^2\phi}{dz^2} + \frac{N^2(z)}{c^2}\phi = 0, \quad (14)$$

$$\phi = 0 \text{ при } z = 0, \quad (15)$$

$$\phi = 0 \text{ при } z = -H, \quad (16)$$

где  $\phi(z)$  – вертикальная составляющая скорости,  $H$  – средняя глубина, а  $N(z)$  – частота плавучести.

Граничное условие на поверхности (15) является приближением «твёрдой крышки», которая справедливо для бароклининых решений. Второе граничное условие (16) относится к океану с плоским дном. Горизонтальные изменения  $f$ ,  $H$  и  $N(z)$  предполагаются незначительными, что позволяет применить для уравнений движения WKВ-приближение, что в конечном итоге позволит получить локальные оценки радиуса деформации.

Задача на собственные значения (14), (15), (16) допускает бесконечное число упорядоченных неотрицательных собственных значений  $c_1^{-2} < c_2^{-2} < c_3^{-2} < \dots$  и соответствующих собственных функций  $\phi_1(z)$ ,  $\phi_2(z)$ ,  $\phi_3(z)$ , ... Нижний индекс означает номер бароклининой моды. Собственные значения и собственные функции оценены путем дискретизации непрерывного изменения частоты плавучести на профилях (Chelton et al., 1998).

Таким образом, с использованием WKВ-приближения собственные значения  $c_n$  могут быть рассчитаны по формуле:

$$c_n \approx c_n^{WKВ} = \frac{1}{n\pi} \int_{-H}^0 N(z) dz, \quad n \geq 1. \quad (17)$$

Поскольку анализ применим ко всем нормальным модам стратифицированной жидкости, то имеется бесконечное множество радиусов Россби, каждый из которых связан с отдельной модой.

Физический смысл  $c_n$  – фазовая скорость для моды  $n$  длинных гравитационных волн для непрерывно стратифицированной вращающейся жидкости (Гилл, 1986; Ле Блон, Майсек, 1981). Отсюда получаем основные выражения для радиуса деформации Россби ( $R_n$ ), соответствующего моде  $n$ :

$$R_n = \frac{c_n}{|f(\varphi)|}, \quad \text{если } \varphi \geq 5^\circ, \quad (18)$$

$$R_n = \sqrt{\frac{c_n}{2\beta(\varphi)}}, \quad \text{если } \varphi \leq 5^\circ, \quad (19)$$

где  $f = 2\Omega \sin\varphi$  – параметр Кориолиса,  $\Omega = \frac{2\pi}{T} = 7,29 * 10^{-5} \text{ с}^{-1}$  – угловая скорость вращения Земли вокруг оси,  $\varphi$  – широта места;  $\beta = \frac{df}{dy} = \frac{2\Omega \cos\varphi}{R_E}$  – величина, характеризующая скорость изменения параметра Кориолиса с широтой,  $R_E = 6371 \text{ км}$  – радиус Земли.

Вне экваториальной области ( $\varphi \geq 5^\circ$ ) бароклинный радиус деформации Россби вычисляется по формуле (18), однако вблизи экватора ( $\varphi \leq 5^\circ$ ) параметр Кориолиса, стоящий в знаменателе, стремится к нулю, по этой причине также используется формула (19).

Согласно формулам (17) и (18) в WKB-приближении радиус деформации Россби вне зоны экватора определяется по формуле:

$$R_n = \frac{\int_{-H}^0 N(z) dz}{n \pi |f(\varphi)|}, \quad n \geq 1. \quad (20)$$

На основании формулы (20) можно сделать несколько выводов. Во-первых, радиус деформации  $R_n$  уменьшается с широтой  $\varphi$ . Во-вторых, на заданной широте радиус деформации  $R_n$  прямо пропорционален интегралу частоты плавучести и обратно пропорционален номеру моды. Так как в высоких широтах стратификация, как правило, уменьшается, это также приводит к уменьшению радиуса Россби по направлению к полюсам.

Данную формулу можно аппроксимировать, используя первую теорему о среднем (21) (Фихтенгольц, 1969), согласно которой

$$\int_a^b f(x)dx = \mu(b - a). \quad (21)$$

где  $\mu$  – это среднее значение функции  $f(x)$  на отрезке  $[a; b]$ .

Применив данную теорему, мы можем представить интеграл, используемый в формуле (20), как произведение средней по глубине частоты Вайсяля-Брента ( $N$ ) на общую глубину ( $H$ ):

$$\int_{-H}^0 N(z)dz = NH. \quad (22)$$

Таким образом, можно получить простую формулу, которую на практике обычно и применяют для оценки бароклинного радиуса деформации Россби:

$$R_n = \frac{NH}{\pi f}. \quad (23)$$

Для практических целей можно использовать ресурса [http://www-po.coas.oregonstate.edu/research/po/research/rossby\\_radius/](http://www-po.coas.oregonstate.edu/research/po/research/rossby_radius/) – готовый массив с оценками бароклинного радиуса деформации Россби (км), построенного на одноградусной сетке по данным (Chelton et al., 1998).

### 3.3. ВТОРОЙ МЕТОД (ДВУХСЛОЙНАЯ МОДЕЛЬ ОКЕАНА)

Проблемы океанологии приводят к необходимости изучения стратифицированной жидкости, то есть такой несжимаемой жидкости, плотность которой изменяется по вертикали. В таком случае часто применяются  $n$ -слойные модели океана. Предполагается, что жидкость состоит из конечного числа несмешивающихся слоёв разной плотности, при этом плотность в каждом слое постоянна, а также часто рассматривается только двумерный случай, при котором более лёгкая жидкость расположена сверху над более тяжёлой (Овсянников, 1979). На этом основан *второй метод* расчёта бароклинного радиуса деформации Россби, а именно на двухслойной модели океана (Ле Блон, Майсек, 1981).

При использовании второго метода прежде всего необходимо определить глубину границы между слоями для каждого профиля. Проблема её определения подробнее описана в разделе 4.3. В большинстве случаев граница определяется по частоте Вайсяля-Брента – по его максимальному значению или по глубине слоя скачка. После определения границы

рассчитываются толщины и средние по глубине значения плотности верхнего и нижних слоев.

Таким образом, первый бароклиновый радиус деформации Россби в двухслойной модели, согласно работе Ле Блон, Майсек (1981) определяется следующим выражением:

$$R_1 = \frac{1}{f} \sqrt{g' \frac{h_1 h_2}{h_1 + h_2}}, \quad (24)$$

где  $g' = g \frac{\rho_2 - \rho_1}{\rho_2}$  – приведенное (редуцированное) ускорение свободного падения,  $h_1, h_2$  – толщина верхнего и нижнего слоев,  $\rho_1, \rho_2$  – плотность верхнего и нижнего слоев.

Для оценок так же часто используют упрощенную формулу (25). Суть такого упрощения заключается в том, что как правило толщина верхнего слоя значительно меньше толщины нижнего ( $h_1 \ll h_2$ ), а следовательно,  $h_2 \approx h_1 + h_2$ .

$$R_1 = \frac{1}{f} \sqrt{g' h_1}, \quad (25)$$

## 4. ПРОБЛЕМЫ, ВОЗНИКАЮЩИЕ ПРИ ЧИСЛЕННОЙ ОЦЕНКЕ БАРОКЛИННОГО РАДИУСА ДЕФОРМАЦИИ РОССБИ

Несмотря на простой с первого взгляда вид формул для оценки радиуса деформации, на практике возникает множество трудностей и путаница. Рассмотрим некоторые проблемы, возникающие при расчёте радиуса деформации.

### 4.1. УЧЁТ ЧИСЛА $\pi$

Часто возникает путаница, связанная с учетом в знаменателе формулы (23) коэффициента  $\pi$ , который многими исследователями не учитывается. Это означает, что в практических задачах оценки бароклинового радиуса могут различаться более чем в 3 раза. Например, для Лофотенской котловины Норвежского моря Fer et al. (2018) и Nurser et al. (2014) указывают оценки бароклинового радиуса в три раза меньше, чем Köhl (2007) и Volkov et al. (2018). Таких примеров несоответствия можно привести больше. На неопределенность, связанная с учетом коэффициента  $\pi$  в знаменателе формулы оценки

бароклинического радиуса Россби, указывают также Ferrari and Wunsch (2009): «in some cases, we are unable to determine whether published results are inconsistent because of this fundamental ambiguity». Эта неопределенность присутствует во многих исследованиях, где численные оценки радиуса являются существенными. И даже для одной и той же акватории авторы приводят оценки радиуса, которые отличаются более чем в три раза. В частности, в (Volkov et al., 2015) указывают, что в районе Лофотенского вихря (область, ограниченная  $69^\circ - 70^\circ$  с.ш. и  $3^\circ$  в.д. –  $5^\circ$  в.д.) бароклинический радиус деформации равен 20-25 км. В (Köhl, 2007) для области, ограниченной  $69^\circ - 7^\circ$  с.ш.,  $0^\circ - 8^\circ$  з.д., определяет радиус деформации равным 27,8 км. Авторы, рассчитывая радиус по формуле WKB-приближения, не включили в знаменатель число  $\pi$ . В то же время в работе (Fer et al, 2018), где дана оценка бароклинического радиуса деформации Россби путем решения задачи Штурма-Лиувилля (метод WKB-приближения), в области Лофотенского вихря получено значение для бароклинического радиуса 12 км. В этой же работе бароклинический радиус деформации рассчитывался также и другим способом – по формуле для двухслойной жидкости, и значение радиуса 8 км. Подобные оценки получены также в работах (Chelton, 1998; Nurser, 2014). В формулах Chelton et al. (1998) коэффициент  $\pi$  обязательно учитывается в знаменателе, как и в теории, изложенной в монографии Гилл (1986).

Согласно работе Ле Блона и Майсека (1981), внутренний (бароклинический) радиус деформации Россби для двухслойной жидкости можно рассчитать по формулам (8), (24), (25). Обратим внимание, что в этих формулах нет множителя  $\pi$ , который имеется в формулах (20) и (23) (Chelton et al., 1998; Гилл, 1986). Именно это является источником несоответствия конкретных оценок радиуса деформации, полученных различными учеными. Однако следует отметить, что множитель  $\pi$  содержится непосредственно в дисперсионном соотношении (6) для бароклинических волн. Это означает, что Ле Блон и Майсек (1981) также учитывают  $\pi$  в той части дисперсионных соотношений, которая касается радиуса деформации, но делают это непосредственно в дисперсионном уравнении. Таким образом, бароклинический радиус деформации, который определяется как масштаб кривизны при исследовании волн в стратифицированной жидкости, как физическая характеристика, имеющая самостоятельное значение, должна содержать параметр  $\pi$  при получении оценок. Другими словами, если не опираться на волновое обоснование, а использовать бароклинический радиус деформации Россби для каких-то иных, самостоятельных задач, необходимо использовать формулы типа (20) и (23), содержащие  $\pi$  в знаменателе (Chelton et al., 1998; Гилл, 1986).

Педлоски (1984) также вводит понятие «внутренний масштаб длины», которое по факту является «внутренним радиусом деформации Россби или просто радиусом деформации:

$$L_D = \frac{NH}{f} = \frac{\sqrt{g'H}}{f}. \quad (26)$$

В этой формуле так же, как и у Ле Блон и Майсек (1981), не содержится  $\pi$  в знаменателе, в отличие от формул, представленных в Гилл (1986) и Chelton et al. (1998). Однако в дальнейшем, как и Ле Блон и Майсек (1981), Педлоски также учитывает множитель  $\pi$  в дисперсионном соотношении для волн.

Таким образом, если исходить из практических задач, когда оценки бароклинного радиуса деформации Россби имеют самостоятельное значение и определяются численно, необходимо руководствоваться формулами Гилл (1986) и Chelton et al. (1998), содержащими  $\pi$  в знаменателе.

В тех случаях, когда формулу для радиуса деформации используют без учета  $\pi$  в знаменателе, имеется в виду оценочная формула, верная с точностью до порядка. Дело в том, что понятие масштаба Россби или бароклинного радиуса деформации гораздо шире, чем просто константа в дисперсионном соотношении для волн Россби. **Этот масштаб существует и тогда, когда волн Россби нет или их дисперсионное соотношение неизвестно (для каких-нибудь сложных областей). Этот масштаб получается из анализа различных слагаемых в уравнениях движения при условии, что эффекты вращения и стратификации одинаково важны. И означает он просто следующее: если вертикальный масштаб движения равен  $L(w)$ , а горизонтальный  $L(h)$ , то эффекты вращения и стратификации одинаково важны при  $L(h) \sim NL(w)/f$ .**

#### 4.2. РАСЧЁТ ЧАСТОТЫ ВЯЙСЯЛЯ-БРЕНТА

Квадратный профиль частоты Вьяйсяля-Брента вычисляется на дискретных глубинах на основе профиля плотности, который в свою очередь рассчитывается с помощью международного термодинамического уравнения состояния морской воды TEOS-10 (<http://www.teos-10.org/>) и имеющихся профилей  $T$ - $S$ - $P$ .

Некоторая сложность заключается в том, что стандартные океанологические горизонты наблюдений расположены на разных расстояниях друг от друга: чем больше

глубина, тем больше расстояние между горизонтами. В связи с этим для определения средней по глубине частоты нельзя просто найти среднее арифметическое значение по ряду. Для решения данной проблемы мы предлагаем использовать следующую формулу:

$$N_{mean} = \frac{\sum_{i=1}^n \left[ (H_{i+1} - H_i) * \frac{N_{i+1} + N_i}{2} \right]}{H_{max}}, \quad (27)$$

где  $N_{mean}$  – средняя по глубине частота Вяйсяля-Брента,  $H_{max}$  – глубина в точке,  $N_i$ ,  $H_i$  – частота Вяйсяля-Брента на горизонте  $i$  и глубина горизонта  $i$ .

#### **4.3. ОПРЕДЕЛЕНИЕ ГРАНИЦЫ МЕЖДУ СЛОЯМИ В ДВУХСЛОЙНОЙ МОДЕЛИ ОКЕАНА**

Если говорить о практических трудностях, то при использовании второго подхода, основанного на идее о двухслойной модели океана, возникает сложность при определении глубины границы между слоями. Например, в работе Белоненко и др. (2016) авторы использовали глубину максимальной частоты Вяйсяля-Брента, однако при попытке проведения расчётов по аналогичной методике выяснилось, что имеется довольно большое количество точек, где максимальная частота плавучести наблюдалась на поверхности или у дна.

Наиболее логичным видится выделение границы по глубине максимального градиента частоты Вяйсяля-Брента (по аналогии с термо-, гало- и пикноклином), однако это приводит к проблеме автоматического выделения слоя скачка, что является весьма нетривиальной задачей. При этом следует учитывать возможное наличие суточного пикноклина, который в данной задаче рассматривать не следует; в этом вопросе нас интересует сезонный или главный пикноклин.

Наиболее простой путь – использование данных по толщине верхнего квазиоднородного слоя (ВКС), которую также можно принять за глубину границы между слоями. Несмотря на то, что расчёт ВКС также является непростой задачей, такие значения можно получить из различных массивов данных (например, ARMOR 3D, GLORYS и др.).

Необходимо учитывать, что второй метод подходит только для тех областей, где можно явным образом выделить два слоя. Например, он неприменим в областях глубокой зимней конвекции, где перемешивание может достигать значительных глубин (1000 метров и более).

#### 4.4. ОБЛАСТИ НЕУСТОЙЧИВОЙ СТРАТИФИКАЦИИ

При проведении расчётов в некоторых точках, расположенных преимущественно в прибрежных областях, наблюдалась неустойчивая стратификация, то есть менее плотные слои находились под более плотными, в результате чего параметр  $g' = g \frac{\rho_2 - \rho_1}{\rho_2}$  или  $N^2$  получались отрицательными, что делало невозможным дальнейшее извлечение корня. В таком случае принималось  $g' = 0$  и  $N^2 = 0$ . Такое допущение возможно, поскольку обрушение более плотных слоёв происходит достаточно быстро, в соответствии с законом Архимеда происходит вытеснение менее плотных масс жидкости вверх (Доронин, 1978).

В работе Chelton et al. (1998) предлагается иное решение такой проблемы. Авторы предлагают заменять отрицательное значение частоты на соседнее, расположенное на следующей большей (при положительной шкале) глубине. В случае, когда последнее значение (у самого дна)  $N^2$  является отрицательным, авторы предлагают заменять его на  $10^{-8}$ .

### 5. ЧИСЛЕННЫЕ ОЦЕНКИ БАРОКЛИННОГО РАДИУСА ДЕФОРМАЦИИ В РАЗНЫХ ЧАСТЯХ МИРОВОГО ОКЕАНА

Понимая большое практическое значение данной характеристики, Chelton et al. (1998) разработали надёжную климатологию и исследовали географическую изменчивость первого бароклинного радиуса деформации Россби для Мирового океана, который имеет важное значение при исследовании бароклинных явлений в океане. Эта климатология получена по осредненным значениям частоты Вайсаля-Брента и не учитывает эффекты временной изменчивости стратификации.

В случае, когда поставленная исследовательская задача позволяет пренебречь сезонной изменчивостью бароклинного радиуса деформации, а также не требуется большое пространственное разрешение удобно использовать этот климатический массив Chelton et al. (1998), реализованный на  $1^\circ$  сетке и доступный по ссылке: [http://www-po.coas.oregonstate.edu/research/po/research/rossby\\_radius/](http://www-po.coas.oregonstate.edu/research/po/research/rossby_radius/).

На рисунке 1 представлена карта радиуса деформации для всего Мирового океана, построенная по этим данным. Видно, что радиус деформации изменяется в широком диапазоне масштабов, достигая в экваториальной зоне 250 км. Для наших исследований наибольший интерес представляют оценки радиуса деформации в Северной Атлантике



(рис. 2). На рисунке 2 видно, что радиус деформации в рассматриваемом районе не превышает 11 км, а для большей части акватории составляет 6-8 км, что соответствует оценкам Fer et al. (2018) и Nurser et al. (2014) для этого региона. Однако, обратим внимание, что массив Chelton et al. (1998) содержит большое число пропусков, особенно в прибрежных областях и российской Арктике. Кроме того, для большинства районов Мирового океана сезонная изменчивость термохалинных характеристик и, следовательно, частоты плавучести весьма значительна, поэтому оценки радиуса деформации будут также различаться.

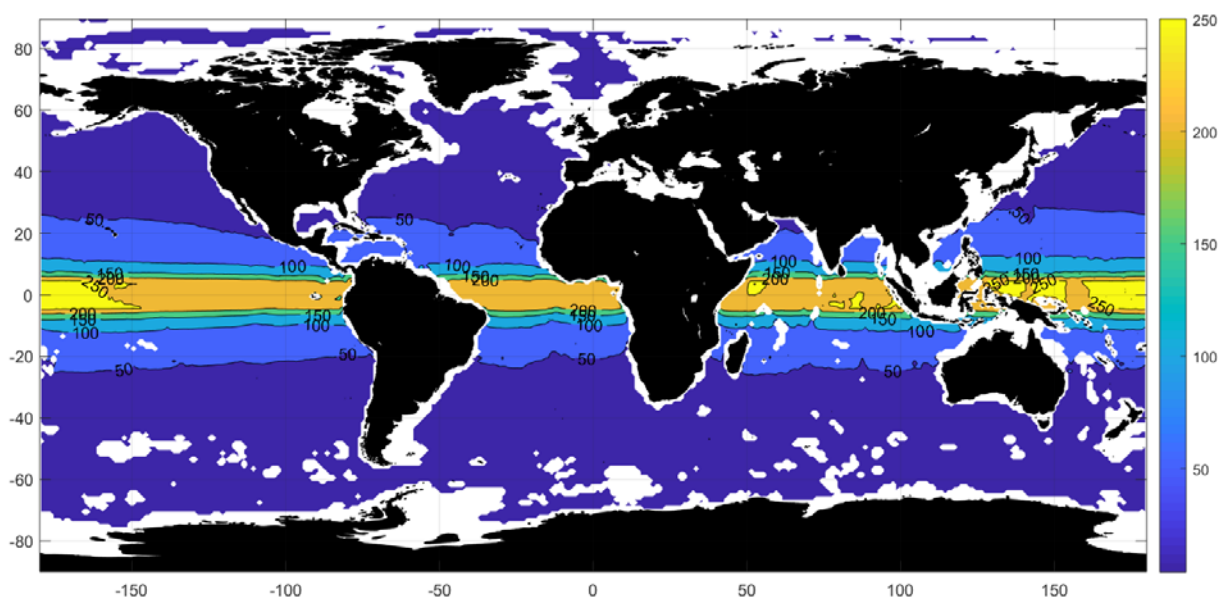


Рис. 1 – Пространственное распределение бароклинного радиуса деформации Россби (км).

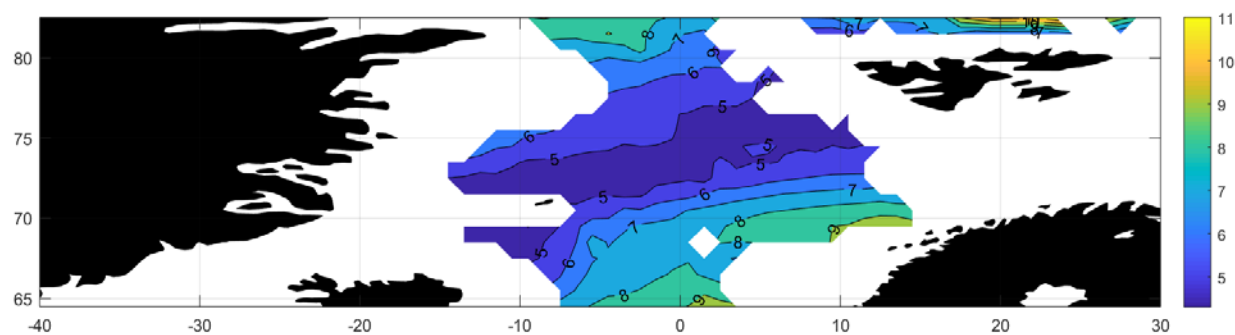


Рис. 2 – Пространственное распределение бароклинного радиуса деформации Россби для Северной Атлантики (км).

Далее рассмотрим результаты расчётов, проведённых для Северо-Европейского бассейна на основе сеточных массивов данных ARMOR, доступные на ресурсе

<http://marine.copernicus.eu> . В отличие от оценок, сделанных Chelton et al. (1998), состоит в том, что учитывались сезонные изменчивости термохалинных характеристик.

Начнём с результатов, полученных по первому методу использующего частоту Вейселя-Брента. Расчёты по основной (20) и аппроксимированной (23) формулам дали практически идентичные результаты. Рассмотрим подробнее схожесть полученных рядов на примере расчётов за 15 января 2014 года. Средняя разность между расчётами составляет  $9,52 * 10^{-5}$  км, однако в большинстве случаев разница наблюдается только начиная с шестого знака после запятой (рис. 3). Стандартное отклонение разностей составило 0,0031 км, что крайне мало по сравнению с самими значениями. Большая разность расчётов (до 0,18 км) наблюдалась только вблизи берегов.

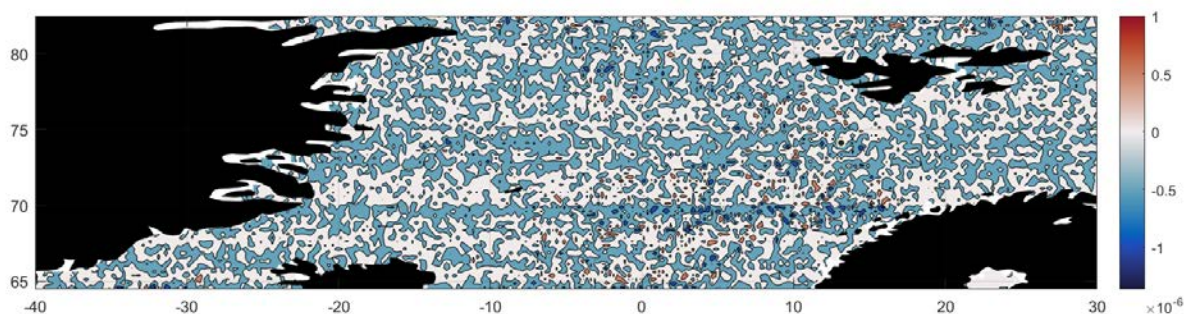


Рис. 3 – Разность расчётов по формуле (9) и (12) (в км)

На основании вышесказанного можно сделать вывод, что возможно использовать выражение (23) – более простой в использовании вариант без ощутимой потери в точности расчётов.

В ходе исследования был вычислен среднемесячный и среднегодовой бароклинный радиус деформации Россби по методу WKВ-приближения для Северо-Европейского бассейна за период с 1993 по 2016 года. Было выяснено, что максимальные величины радиуса деформации Россби наблюдаются в восточной части Лофотенской котловины и в северной части исследуемого района, что соответствует  $\sim 82^\circ$  с.ш. (до 7 – 9 км), а также в Норвежской котловине (до 6 – 7 км). Это области максимальных глубин исследуемого района (3250 м для Лофотенской котловины и более 3500 для Норвежской котловины и северной части), что видно из карты батиметрии (рис. 4).

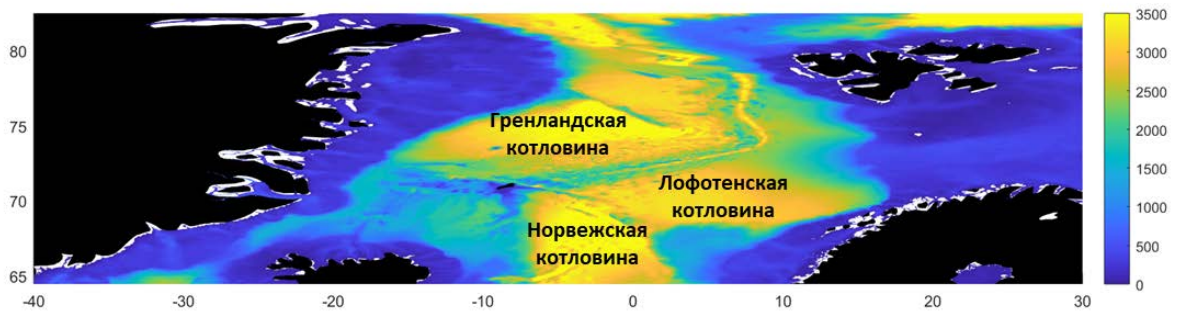


Рис. 4 – Рельеф дна Северо-Европейского бассейна

Интересно отметить, что в Гренландской котловине, которая также имеет значительную глубину до 4846 м (Большая российская энциклопедия, 2004–2017), радиус Россби составляет всего лишь 2 – 4 км. Так как  $R_1 = f(N, H, f)$ , то можно сделать вывод, что причиной небольших значений радиуса в районе 75° широты является частота плавучести ( $N$ ), поскольку глубина ( $H$ ) больше, чем в Лофотенской и Норвежской котловинах, а параметр Кориолиса ( $f$ ) имеет равномерное зональное изменение. В свою очередь частота плавучести зависит от параметра Кориолиса и градиента плотности воды. Таким образом, можно сделать вывод, что в Лофотенской и Норвежской котловинах градиент плотности воды значительно выше, чем в Гренландской. Это действительно имеет место быть, если учесть, что над Лофотенской и Норвежской котловинами проходит тёплое Северо-Атлантическое течение (рис. 5).

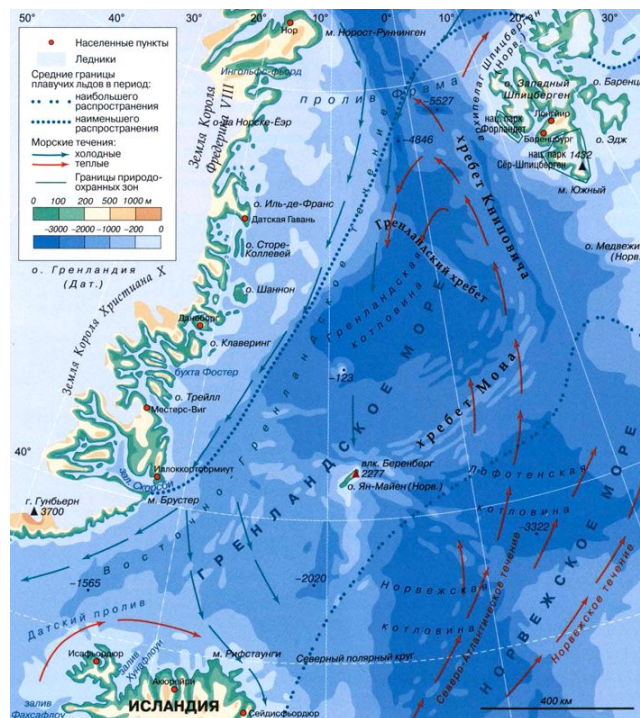


Рис. 5 – Рельеф дна и схема течений в Северо-Европейском бассейне.

Межгодовая изменчивость не является ярко выраженной, однако присутствует небольшая сезонная изменчивость в пределах 1 – 2 км (рис. 6). Наибольшие значения характеристики достигаются в тёплое время года (июль-сентябрь), а наименьшие – в холодное (февраль-март).

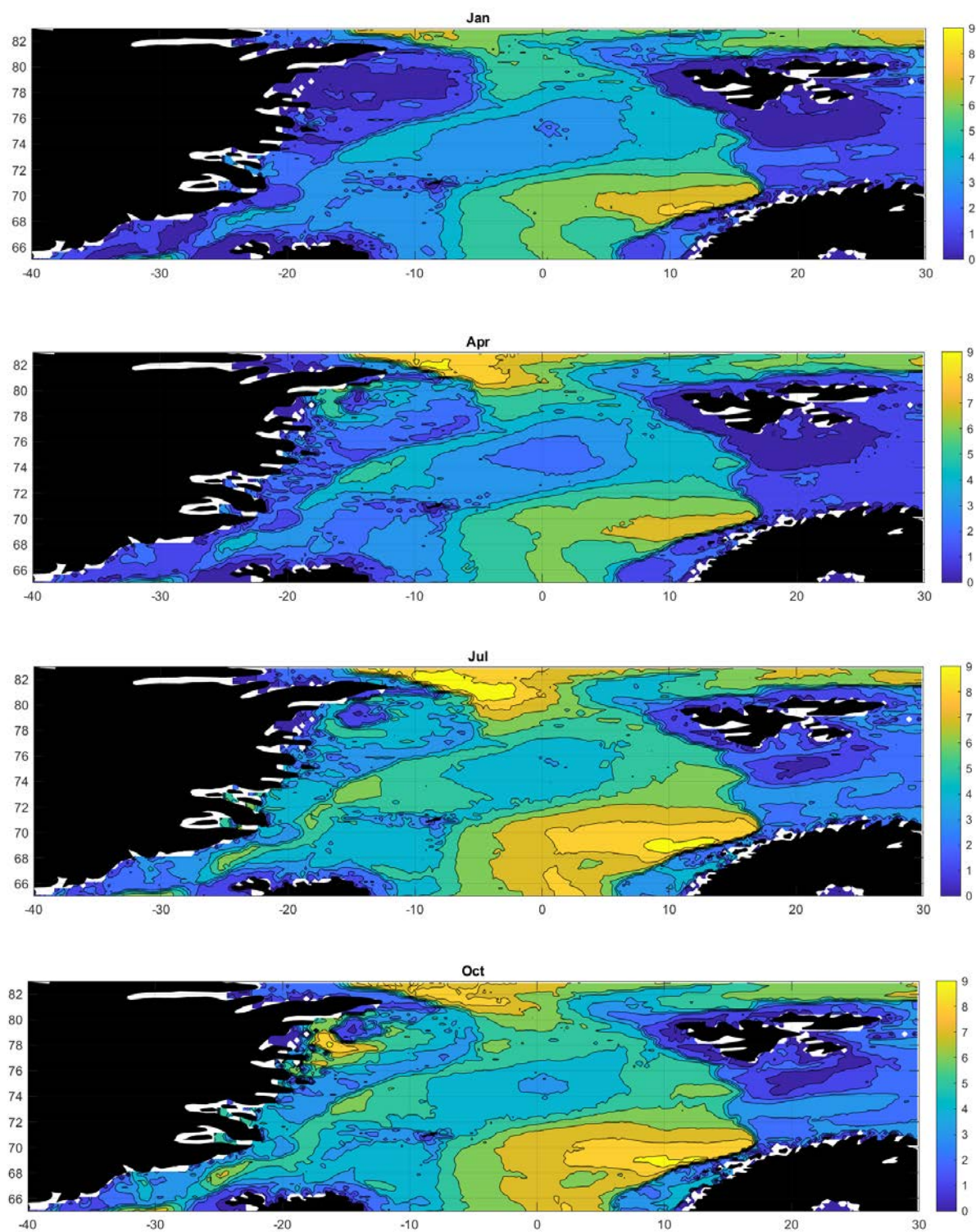


Рис. 6 – Сезонная изменчивость радиуса деформации Россби (км), вычисленная по первому методу (осреднение за 1993 – 2016 года)

Теперь рассмотрим результаты расчёта по второму методу, основывающимся на двухслойной модели океана. Мы предприняли попытку разделить океан на два слоя по глубине ВКС. Расчёты проводились по формуле (24) за 2014 – 2016 года.

ВКС имеет значительную сезонную и пространственную изменчивость. В большинстве случаев максимальные значения ВКС наблюдаются в Гренландской котловине в зимнее время года (декабрь – март) и составляют в среднем до 1400 – 1800 метров (рис. 7), а иногда и более. При этом в летнее время (июль – сентябрь) толщина ВКС в этом же районе может сокращаться до значений порядка 10 метров (рис. 8).

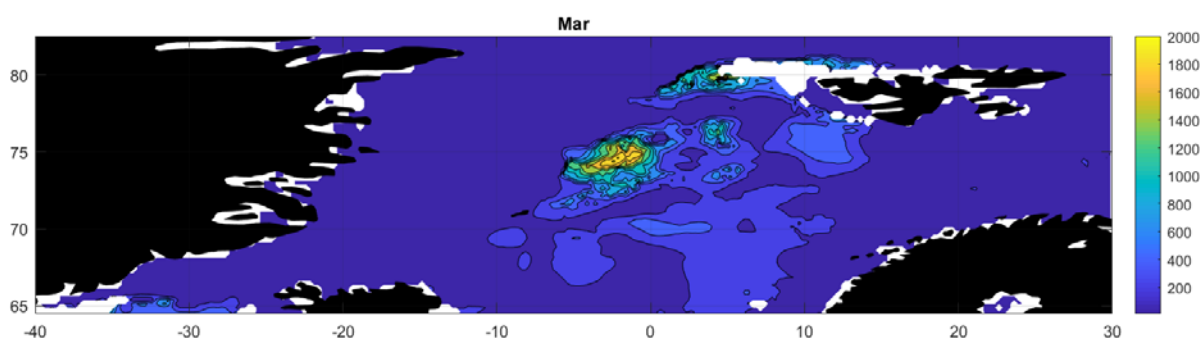


Рис. 7 – ВКС (в метрах) по данным ARMOR 3D за 15.03.2015

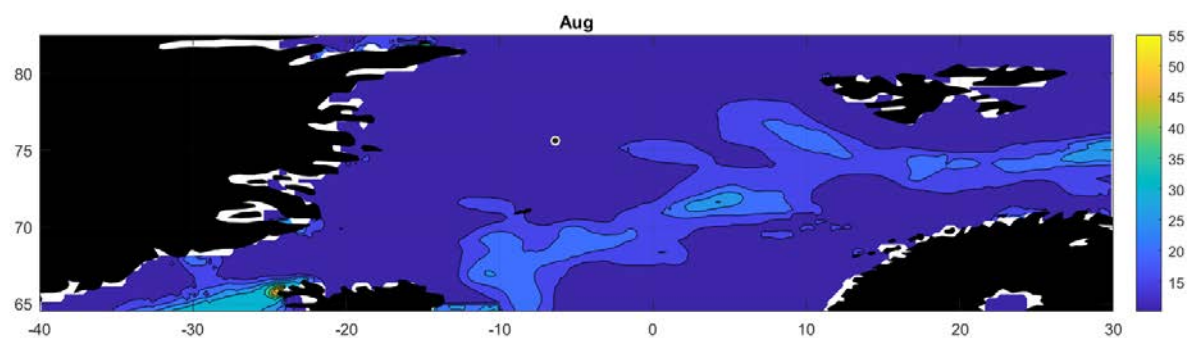


Рис. 8 – ВКС (в метрах) по данным ARMOR 3D за 15.08.2014

В связи с этим величина вычисленного радиуса деформации значительно колеблется в течение года (рис. 9): максимальные значения радиуса в летние месяцы составляют всего 3 – 3,5 км, в зимние же он может достигать 14 – 18 км.

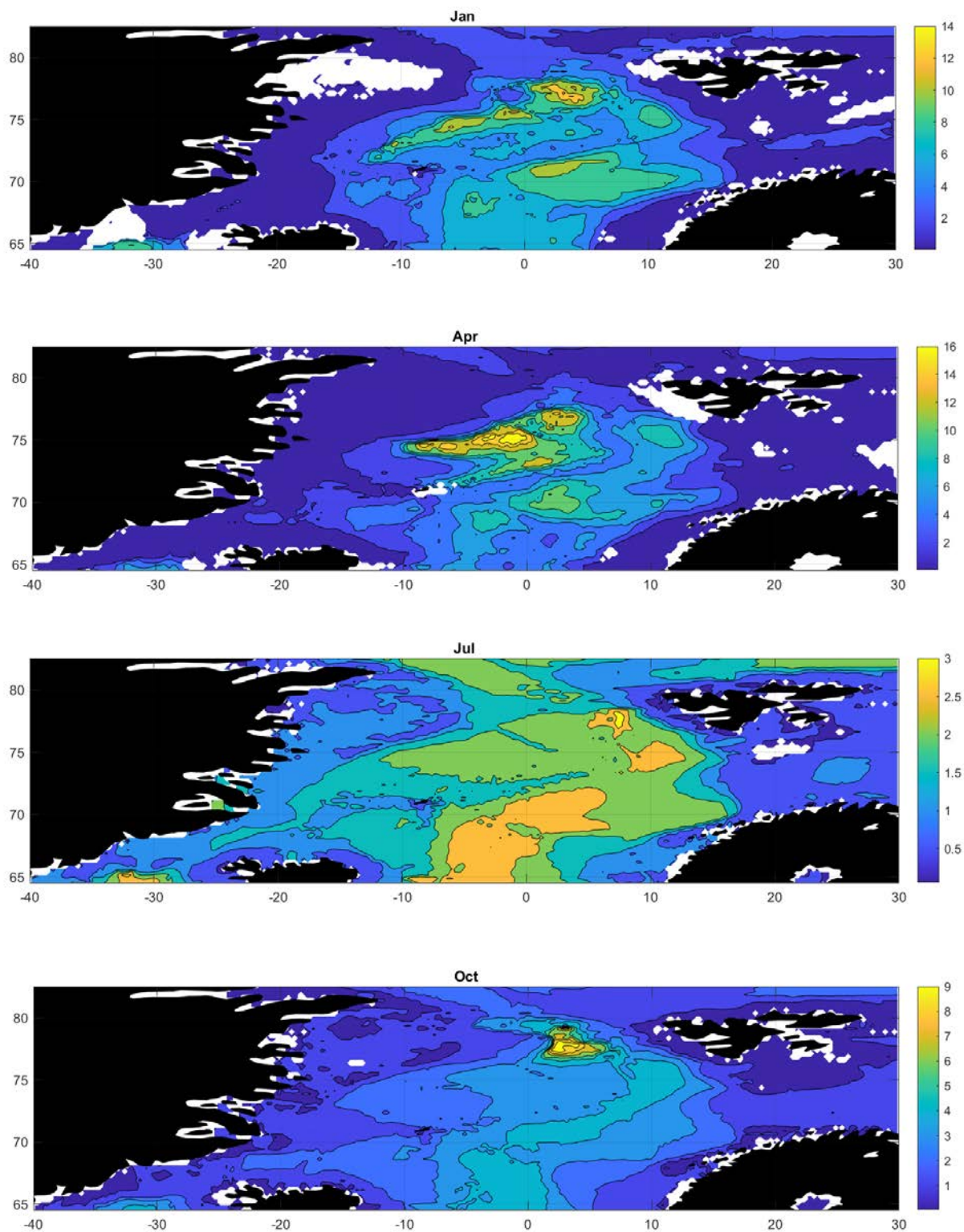


Рис. 9 – Сезонная изменчивость радиуса деформации Россби (км), вычисленная по второму методу (осреднение за 2014 – 2016 года)

Вероятно, второй метод не лучшим образом подходит для расчётов радиуса деформации в данном районе, поскольку явное выделение границы между слоями в Гренландской котловине затруднено (перемешанный слой достигает значительных глубин).

В целом, сравнение оценок радиуса, полученных различными методами, выявило значительные различия в пространственном распределении величин, которые связаны с особенностями методов. В частности, оценки радиуса деформации, вычисленного по формуле для двухслойной жидкости, существенно зависят от глубины  $h_1$ , которая в нашем случае определялась по глубине ВКС.

Теперь рассмотрим оценки бароклинного радиуса деформации Россби для северной части Тихого океана, полученные различными методами (Белоненко, Кубряков, 2014).

На рисунке 10 видно, что оценки бароклинного радиуса деформации, полученные для двухслойной модели, несколько отличаются от оценок по формулам ВКБ-приближения. Расчеты по двухслойной модели дают в регионе больший диапазон изменчивости бароклинного радиуса Россби – существенно увеличивается площадь минимальных и, в особенности, в диапазоне 15 - 20° с.ш. – площадь максимальных значений характеристики (рис. 10б). В то же время радиусы деформации, рассчитанные по формулам ВКБ-приближения (рис. 10а), гораздо более чувствительны к изменениям топографии (рис. 11), для которой в данном регионе характерны большие градиенты – до 8 км на 100 км (рис. 3).

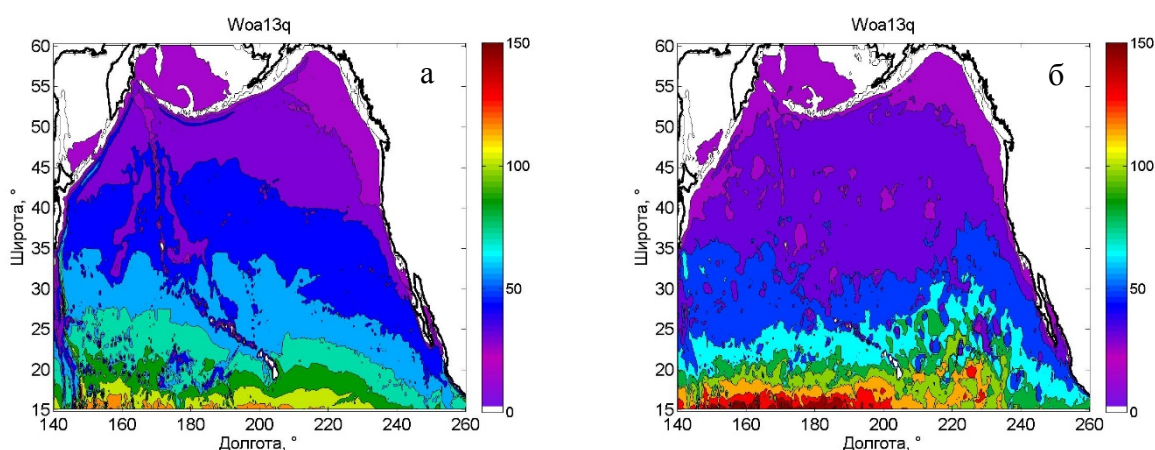


Рис. 10 – Пространственное распределение бароклинного радиуса Россби (км) для северной части Тихого океана, рассчитанного по методу ВКБ-приближения (а) и на основе двухслойной модели океана (б). Рассматривались данные климатического массива WOA13 с квартальным осреднением до глубины 5000 м.

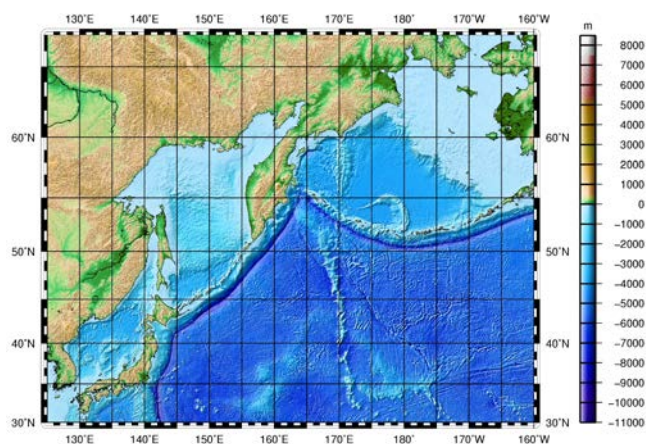


Рис. 11 – Батиметрическая карта северной части Тихого океана

Анализ рисунков 10 и 11 приводит к следующим выводам. Оценки бароклинного радиуса деформации Россби, полученные с использованием ВКБ-приближения, чувствительны к рельефу дна и лучше учитывают его топографические особенности, в то время как оценки, сделанные по двухслойной модели, дают больший диапазон изменчивости этой характеристики. Оценки бароклинного радиуса деформации, полученные для двухслойной модели, лучше соответствуют эмпирическим оценкам фазовых скоростей, в то время оценки радиуса деформации по ВКБ-методу почти для всех широт дают завышенные значения теоретических фазовых скоростей (Белоненко, Кубряков, 2014).

## СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Белоненко Т.В., Кубряков А.А. Временная изменчивость фазовой скорости волн Россби в Северной части Тихого океана // Современные проблемы дистанционного зондирования Земли из космоса. 2014. Т. 11. № 3. С. 9–18.
2. Белоненко Т.В., Кубряков А.А., Станичный С.В. Спектральные характеристики волн Россби северо-западной части Тихого океана по спутниковым альтиметрическим данным // Исследование Земли из космоса. 2016. № 1–2. С. 43–52.
3. Гилл А. Динамика атмосферы и океана: в 2-х томах. Т. 2. М.: Мир, 1986. 415 с.
4. Доронин Ю.П. Физика моря. Л.: Гидрометеиздат. 1978. 292 с.
5. Ле Блон П., Майсек Л. Волны в океане. В двух частях. М.: Мир, 1981. 365 с.
6. Овсянников Л.В. Модели двухслойной «мелкой воды» // ПМТФ. 1979. № 2. С. 3–14.
7. Педлоски Дж. Геофизическая гидродинамика. В 2-х т. М.: Мир, 1984. Т.1. 398 с., Т.2. 416 с.



8. Фихтенгольц Г.М. Курс дифференциального и интегрального исчисления. М.: Наука. 1969. Т. II.
9. Bjerknes J. Die Theorie der aussertropischen Zyklonenbildung. Meteorologische Zeitschrift. 1937. 54, 460–466.
10. Chelton D.B., deSzoeke R.A., Schlax M.G., El Naggar K. and Siwertz N.. Geographical variability of the first-baroclinic Rossby radius of deformation. J. Phys. Oceanogr. 1998. 28, 433–460.
11. Fer I., Bosse A., Ferron B., Bouruet-Aubertot, P. The Dissipation of Kinetic Energy in the Lofoten Basin Eddy. Journal of Physical Oceanography. 2018. 48(6), 1299–1316. doi:10.1175/jpo-d-17-0244.1.
12. Ferrari R., Wunsch C. Ocean Circulation Kinetic Energy: Reservoirs, Sources, and Sinks. Annu. Rev. Fluid Mech. 2009. 41:253–82.
13. Köhl A. Generation and Stability of a Quasi-Permanent Vortex in the Lofoten Basin. J. Phys. Oceanogr. 2007. 37, 2637–2651.
14. Nurser A. J. G., Bacon S. The Rossby radius in the Arctic Ocean. Ocean Sci. 2014. 10, 967–975.
15. Rossby C.G. (1937). On the mutual adjustment of pressure and velocity distributions in certain simple current systems. I. J. Mar. Res., 1, 15–28.
16. Rossby C.G. (1938). On the mutual adjustment of pressure and velocity distributions in certain simple current systems. II. J. Mar. Res., 2, 239–263.
17. Rossby C.G., et al. (1939). Relation between variations in the zonal circulation of the atmosphere and the displacements of the semi-permanent centers of action, J. Mar. Res. 2, 38–55.
18. Volkov, D. L., Kubryakov, A. A., Lumpkin R. Formation and variability of the Lofoten basin vortex in a high-resolution ocean model. Deep-Sea Res. I. 2015. 105, 142–157.

**Интернет-источники:**

1. <http://marine.copernicus.eu> – Copernicus Marine Environment Monitoring Service. Дата обращения: 7 октября 2018.
2. [http://www-po.coas.oregonstate.edu/research/po/research/rossby\\_radius/](http://www-po.coas.oregonstate.edu/research/po/research/rossby_radius/) – Oregon State University. College of Earth, Ocean, and Atmospheric Sciences. Physical Oceanography. Global Atlas of the First-Baroclinic Rossby Radius of Deformation and Gravity-Wave Phase Speed. Дата обращения: 19 февраля 2019.
3. <http://www.teos-10.org/> – Thermodynamic Equation Of Seawater - 2010 (TEOS-10). Дата обращения: 25 ноября 2018.